

## ESTUDO EXPERIMENTAL E NUMÉRICO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONGELAMENTO DO PURÊ DE CENOURA

### Antônio Augusto Sartori

Programa de Graduação em Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR  
Rua Imaculada Conceição, 1155, CEP 80215-901, Curitiba, PR, Brasil

### Álvaro Cesar Camargo do Amarante

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR  
Rua Imaculada Conceição, 1155, CEP 80215-901, Curitiba, PR, Brasil  
alvaro.amarante@pucpr.br

### Viviana Cocco Mariani

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR  
Rua Imaculada Conceição, 1155, CEP 80215-901, Curitiba, PR, Brasil  
viviana.mariani @pucpr.br

**Resumo.** No presente trabalho um método numérico usando a entalpia e a função de Kirchhoff é descrito e aplicado na solução da equação da condução de calor transiente. Este problema envolvendo mudança de fase, sem geração interna de calor geralmente, é apresentado em função da variável dependente temperatura, porém neste trabalho executa-se uma mudança de variável. Por exemplo, a temperatura depende da densidade ( $\rho$ ) e do calor específico ( $c$ ), esta dependência pode ser removida pela introdução da entalpia específica volumétrica ( $H$ ). De forma análoga a dependência entre a condutividade térmica ( $k$ ) e a temperatura pode ser removida através da integração da condutividade térmica surgindo a função de Kirchhoff ( $E$ ). Com o objetivo de ilustrar e validar o código computacional, para simular o processo de transferência de calor em alimentos congelados foi usado dados experimentais do congelamento de um purê de cenoura. O método numérico de diferenças finitas usando um esquema explícito foi empregado. Os resultados numéricos e experimentais do perfil de temperatura e do fluxo de calor na superfície do alimento, em função do tempo e da variação do coeficiente convectivo de calor ( $h$ ) são apresentados com e sem o uso da função de Kirchhoff mostrando as vantagens do uso desta função principalmente na superfície do alimento. Percebe-se que as equações utilizadas neste trabalho prevêm com razoável precisão a evolução da temperatura no interior de um alimento submetido ao processo de congelamento.

**Palavras chave:** função de Kirchhoff, entalpia, congelamento, purê de cenoura, transferência de calor

### 1. Introdução

A simulação numérica da transferência de calor transiente durante a mudança de fase, no congelamento ou descongelamento de um alimento, tem se tornado uma ferramenta poderosa para o próprio gerenciamento da cadeia de resfriamento dos alimentos. A predição precisa e instantânea da distribuição de temperatura nos alimentos é um passo indispensável para estratégias de controle e projeto de ótimos sistemas de refrigeração melhorando a segurança e qualidade do produto. Devido à importância prática destes problemas de transferência de calor, altamente não lineares, muitas pesquisas têm sido dedicadas para desenvolver modelos físicos apropriados para descrever tais fenômenos de transferência de calor e buscando técnicas numéricas avançadas para resolvê-los.

Ao se considerar os processos de congelamento e descongelamento de alimentos o mecanismo dominante na transferência de calor é a condução. Os problemas de condução envolvendo mudança de fase, chamados problemas de Stefan, pertencem a uma classe mais geral de problemas de fronteira livre. Um primeiro grupo de métodos numéricos para resolver tais problemas é baseado no tratamento da fronteira livre na mudança de fase usando técnicas complicadas para localização da posição da interface a cada novo passo de tempo (Crank, 1984). Geralmente estes métodos têm uma baixa taxa de convergência levando à complicações adicionais quando geometrias multidimensionais são consideradas.

Um segundo grupo de métodos numéricos, mais flexível, não aborda diretamente a posição exata da fronteira livre durante a mudança de fase. A mudança de fase é incorporada nas características termofísicas dependentes da temperatura, assim as equações governantes são resolvidas em um domínio fixo. Esta será a abordagem adotada neste trabalho.

A mudança de fase nos alimentos sólido/líquido ocorre progressivamente em um finito e aproximadamente bem definido intervalo de temperaturas. As duas fases não são claramente separadas e ambas coexistem em uma parte finita do alimento em um dado instante. Neste intervalo as propriedades térmicas como condutividade térmica ( $k$ ) e calor específico ( $c$ ) podem ser aproximadas por funções contínuas por partes e dependentes da temperatura,  $T$ . Geralmente o calor específico exibe uma forma aguda na temperatura de mudança de fase, temperatura crítica, já a condutividade térmica tem uma variação mais regular. Expressões algébricas para as propriedades térmicas de alguns alimentos são frequentemente encontradas na literatura no formato de tabelas (Alhama e Fernández, 2002; Zueco *et al.*, 2004).

As dependências citadas no parágrafo anterior bem como as condições de contorno, de convecção ou radiação, fazem com que estes problemas sejam não-lineares. Alguns métodos numéricos baseados geralmente nas técnicas de diferenças finitas e elementos finitos obtêm a solução usando apenas uma equação governante para ambas as fases. Cada um destes métodos tem suas vantagens e desvantagens o que não será citado neste trabalho. O uso da temperatura como variável dependente é limitada pelo critério de estabilidade desde que o incremento no tempo deve ser maior para evitar oscilações causadas pela forma aguda do calor específico. Por outro lado o uso da variável entalpia ( $H$ ), conhecida como formulação entálpica, necessita do conhecimento da dependência da entalpia com a condutividade e temperatura (Mannapperuma e Singh, 1988; Amarante e Lanoisellé, 2005).

Outra opção é o uso da função de Kirchhoff ( $E$ ) obtida através da integração da condutividade térmica dependente da temperatura. Notou-se durante as simulações numéricas que os resultados numéricos da temperatura sem o uso da função de Kirchhoff oscilam bastante no início do processo de congelamento, principalmente próximo da superfície do alimento, já com o uso da função de Kirchhoff esta oscilação é suavizada.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo principal validar o código computacional para simular o processo de transferência de calor em alimentos congelados. Tal metodologia foi testada usando os dados experimentais do congelamento de um purê de cenoura. O método numérico de diferenças finitas usando um esquema explícito foi empregado. Os resultados numéricos e experimentais do perfil de temperatura em função do tempo em vários pontos são apresentados com e sem o uso da função de Kirchhoff mostrando as vantagens do uso desta função.

## 2. Modelo Matemático,

Através da lei de Fourier, a equação diferencial parcial para ambas as fases é obtida fazendo um balanço de calor sobre uma região pequena (volume elementar) do alimento, a forma desta região depende do sistema de coordenadas adotado. Assim, o problema de condução de calor não linear, envolvendo mudança de fase, sem geração interna de calor, pode ser descrito em um domínio espacial  $\Omega$  pela equação:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [k(T)\vec{\nabla} T] \quad (1)$$

onde  $\rho$  ( $\text{kg/m}^3$ ) é a densidade,  $c$  ( $\text{J/kg}^\circ\text{C}$ ) é o calor específico aparente,  $k$  ( $\text{W/m}^\circ\text{C}$ ) é a condutividade térmica,  $T$  ( $^\circ\text{C}$ ) é a temperatura e  $t$  (s) é o tempo.

No presente trabalho considera-se uma geometria unidimensional no sistema cartesiano de coordenadas, uma placa plana infinita, conforme ilustrado na Figura 1, onde a condição inicial associada a Eq. (1) é:

$$T(x, t) = T_0(x); t = t_0, x \in [0, L] \quad (2)$$

onde  $T_0$  ( $^\circ\text{C}$ ) é a temperatura conhecida no tempo inicial obtida através do experimento,  $t_0$  (s) é o tempo inicial. Na superfície do alimento ( $x = L$ ) a condição de contorno convectiva é considerada,

$$-k(T)\frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty); x = L, t \geq 0 \quad (3)$$

onde  $T_\infty$  ( $^\circ\text{C}$ ) é a temperatura ambiente,  $h$  ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) é o coeficiente de transferência de calor na superfície,  $L$  é a metade do comprimento na direção  $x$ .

Considerou-se no centro do alimento a condição de simetria ou fluxo de calor nulo,

$$k(T)\frac{\partial T}{\partial x} = 0; x = 0, t \geq 0 \quad (4)$$

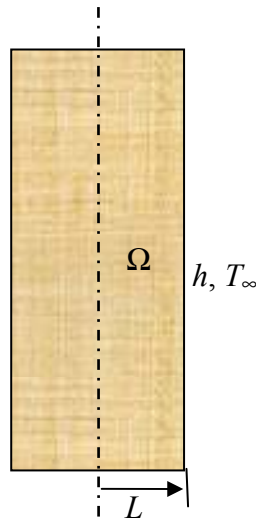


Figura 1 - Domínio computacional.

Executando uma mudança de variável na Eq. (1) a densidade e calor específico dependentes da temperatura podem ser removidos através da introdução da entalpia específica volumétrica ( $H$ ),

$$H(T) = \int_{T^*}^T \rho(T)c(T)dT \quad (5)$$

onde  $T^*$  (°C) é a temperatura de referência que corresponde ao valor nulo de  $H$ .

Com a introdução da entalpia tem-se a formulação entálpica e a Eq. (1) fica,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot [k(T)\bar{\nabla} T] \quad (6)$$

De forma semelhante, a condutividade térmica dependente da temperatura pode ser removida usando a transformação de Kirchhoff (Fikiin, 1996),

$$E(T) = \int_{T^*}^T k(T)dT \quad (7)$$

Usando as Eqs. (5) e (7) na Eq. (1) tem-se,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla^2 E \quad (8)$$

Note que seis relações entre as variáveis  $H$ ,  $E$  e  $T$  são determinadas pelas Eqs. (5) e (7):  $H(T)$ ,  $E(T)$ ,  $T(H)$ ,  $T(E)$ ,  $H(E)$  e  $E(H)$ . Todas essas funções são monotônicas decrescentes e contínuas porque  $\rho$ ,  $c$  e  $k$  são positivas e limitadas (Scheerlinck *et al.*, 2001).

No presente trabalho utilizou-se primeiramente a Eq. (6) juntamente com as condições inicial e de contorno, Eqs. (2), (3) e (4), após utilizou-se a Eq. (8) juntamente com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$H(x, t) = H_0(x); t = t_0, x \in [0, L] \quad (9)$$

onde  $H_0$  (J/m<sup>3</sup>) é a entalpia conhecida no tempo inicial obtida através do experimento,  $t_0$  (s) é o tempo inicial. Na superfície do alimento ( $x = L$ ) a condição de contorno convectiva é considerada e no centro do alimento ( $x = 0$ ) a condição de simetria,

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = h(T - T_{\infty}); x = L, t \geq 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0; x = 0, t \geq 0 \quad (11)$$

### 3. Resultados Numéricos e Experimentais

O purê de cenoura foi congelado em um congelador a placas (Samifi Babcock, Alemanha), o qual é constituído de uma série de placas verticais de 500 x 500 mm e espaçadas de 90 mm, conforme ilustrado na Fig. 2. Vale destacar que a capacidade térmica desta placa não influencia a transferência de calor no purê. O equipamento trabalha em ciclos intermitentes, nos quais o produto é alimentado a 77°C e descarregado quando a temperatura no centro térmico atinge -15°C. O fluido refrigerante utilizado no interior das placas é a amônia a -38,5°C. Quatro termopares (tipo T, diâmetro 1 mm) foram inseridos no produto, um à meia espessura do bloco e os três outros respectivamente a 10, 20 e 30 mm do centro. Um termopar de superfície (N. 20117, RdF Corp., USA) e um fluxímetro (27036-3, RdF Corp., USA) foram instalados na interface placa-produto. Estes instrumentos permitiram a medição do coeficiente de transferência de calor constante de [400; 2000] W/m<sup>2</sup>°C. Tal coeficiente é obtido através do balanço de energia na superfície do produto usando para isto as medidas do fluxo de calor obtido através do fluxímetro, de T<sub>∞</sub> = -38,5°C e da temperatura na superfície do produto obtida através de termopar de superfície. O tempo medido de congelamento médio foi de 120 minutos.

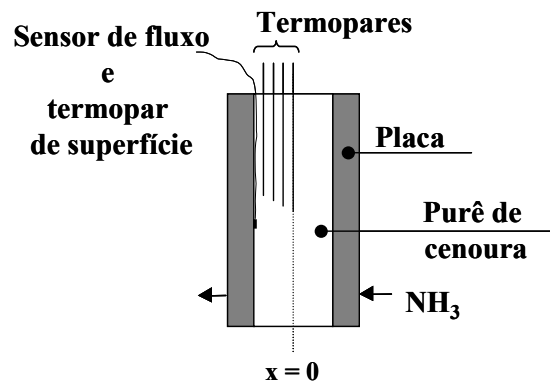


Figura 2 – Diagrama esquemático do congelador de placas com instrumentação.

A solução numérica foi obtida utilizando o método de diferenças finitas explícito. Uma malha numérica formada por 10 pontos nodais, estes armazenados nas faces, foi utilizada. O objetivo principal deste trabalho é validar os resultados experimentais através dos resultados numéricos. Assim, em um primeiro momento não foram feitos estudos do refino da malha ( $\Delta r$ ) e da variação do tempo ( $\Delta t$ ), bem como os esquemas: implícito e de Crank-Nicolson não foram utilizados na solução numérica. Acredita-se que a precisão da solução numérica não foi prejudicada pela adoção do método explícito, conforme verificado no trabalho de Cleland e Earle (1984). Ao usar um esquema explícito deve-se ter cuidado para o mesmo não violar o critério de estabilidade, e este critério não foi violado.

A Fig. 3 ilustra o comportamento da condutividade térmica do purê de cenoura com a variação da temperatura notando que há uma queda abrupta da condutividade térmica em um intervalo bem definido de temperaturas. Assim ao usar a formulação numérica dependente da condutividade térmica tal oscilação pode não ser percebida dependendo do passo de tempo que é utilizado na simulação. Para evitar a obtenção de soluções não realísticas ou com muitas oscilações opta-se então pelo uso da função de Kirchhoff representada pela Eq. (7).

A Fig. 4 apresenta a relação da função de Kirchhoff para o purê de cenoura com a variação da temperatura, tal função foi obtida através da integração da condutividade térmica variando com a temperatura, onde percebe-se que a função é contínua e monotônica.

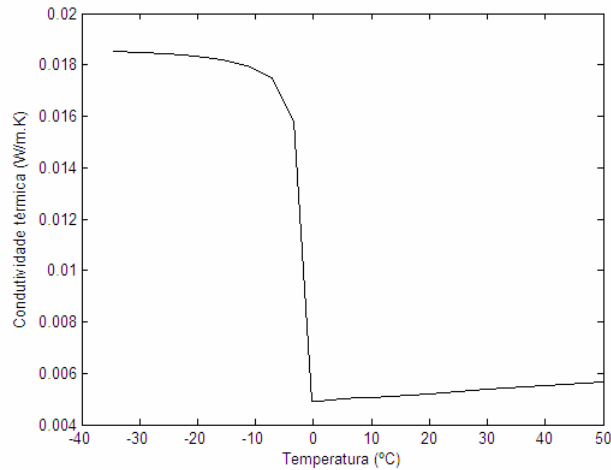


Figura 3 - Condutividade térmica (k) do purê de cenoura.

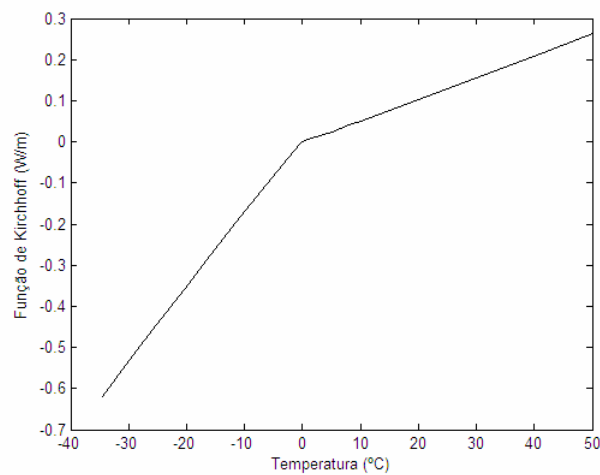


Figura 4 - Função de Kirchhoff (E) para o purê de cenoura.

A Fig. 5 ilustra o comportamento da entalpia volumétrica ( $H$ ) em função da temperatura onde nota-se que a entalpia é representada por uma curva contínua, o mesmo não ocorrendo para o calor específico que apresenta uma descontinuidade próxima da temperatura crítica de congelamento. Assim, optou-se pelo uso da entalpia que substitui a descontinuidade presente na curva do calor específico.

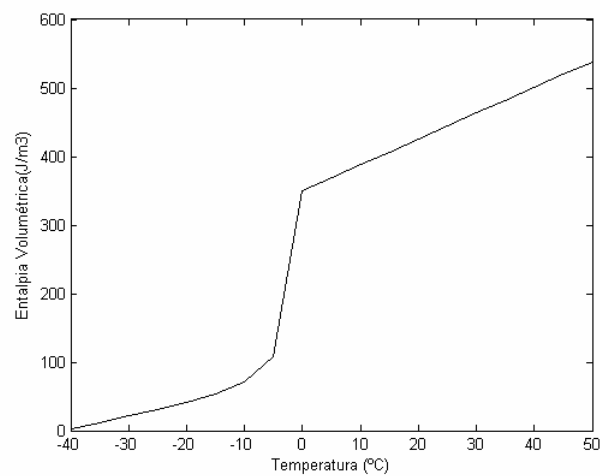


Figura 5 - Entalpia (H) para o purê de cenoura.

Na Fig. 6a ilustra-se o comportamento da temperatura experimental e numérica no centro e na superfície do domínio de cálculo. As oscilações verificadas na temperatura numérica simulada na superfície do produto (instantes iniciais do congelamento) decorrem das descontinuidades das funções  $k(T)$  e  $H(T)$ , enquanto que as oscilações na

temperatura experimental na superfície do produto (instantes finais do congelamento) são originadas pela injeção de vapor d'água no interior das placas para promover o descolamento do produto.

Na Fig. 6b nota-se que as oscilações numéricas para a temperatura na superfície são eliminadas com o uso da função de Kirchhoff, o que torna esta função bastante promissora para a simulação numérica na superfície, contudo no centro do produto o uso da função de Kirchhoff não consegue prever com a mesma precisão o comportamento experimental do congelamento. Nas Figs. 7a e 7b ilustra-se o fluxo de calor na superfície do purê de cenoura experimental e numérico aplicando ou não a função de Kirchhoff, respectivamente. Nota-se pequenas diferenças entre ambas as curvas numéricas principalmente para o intervalo de [0, 30] minutos onde o fluxo de calor numérico obtido sem o uso da função de Kirchhoff oscila com maior intensidade. Percebe-se também que os resultados numéricos não coincidem com os resultados experimentais, isto deve-se ao fato de utilizar a temperatura do ambiente fixa,  $T_{\infty} = -38,5$  °C, enquanto que no experimento esta variável é medida e se altera durante a coleta dos dados, isto é, durante o congelamento.

A Fig 8 ilustra o comportamento dos perfis de temperatura na superfície e no centro, respectivamente, do purê de cenoura durante o congelamento para diferentes coeficientes de transferência de calor, onde nota-se que quanto maior o coeficiente de transferência de calor mais rápido será o congelamento do produto, contudo não há uma mudança significativa com o aumento deste coeficiente.

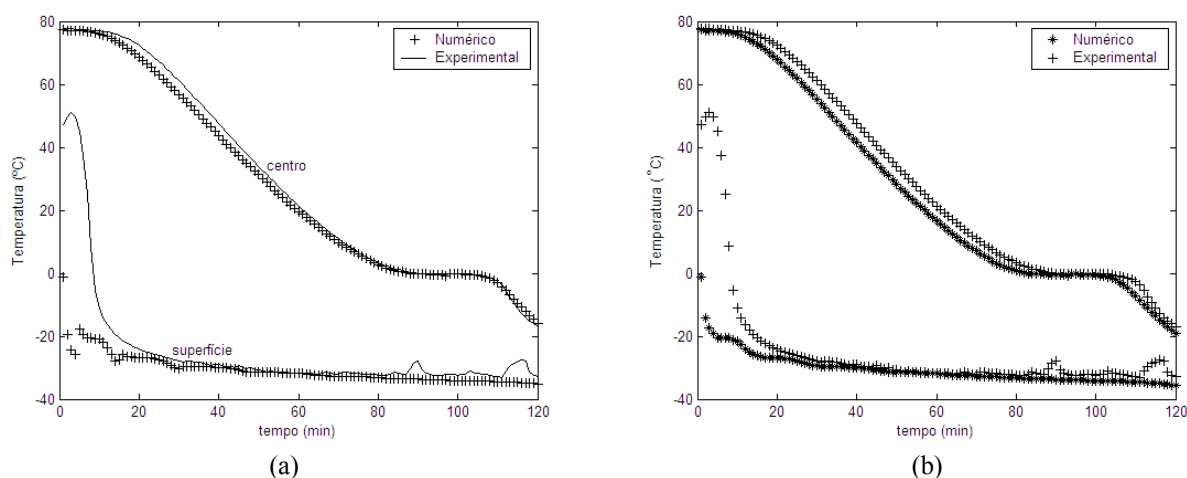


Figura 6 - Perfis de temperatura no purê de cenoura para  $T_{\infty} = -38,5$  °C,  $h = 400$  W/m<sup>2</sup>°C, (a) sem o uso da função de Kirchhoff e (b) usando a função de Kirchhoff.

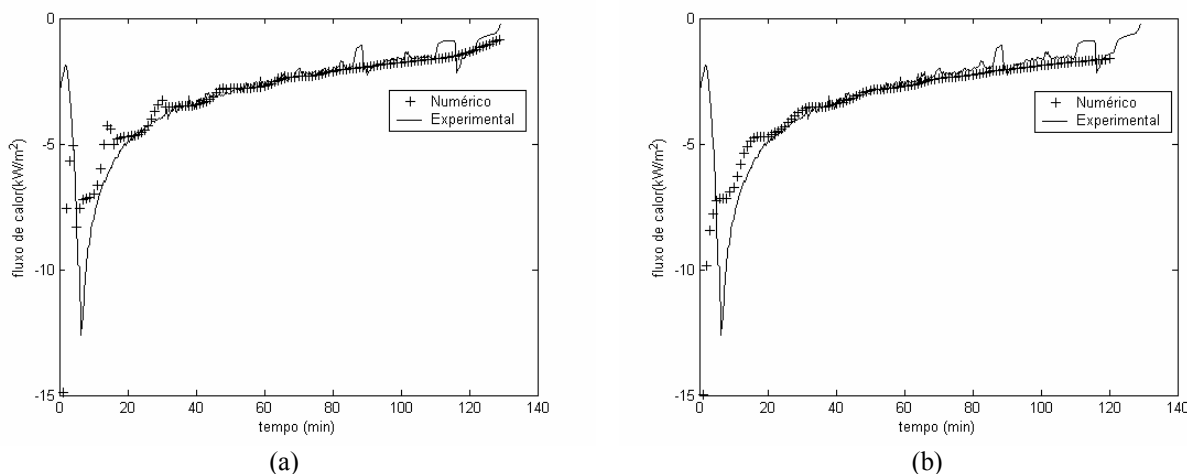


Figura 7 – Fluxo de calor na superfície do purê de cenoura para  $T_{\infty} = -38,5$  °C,  $h = 400$  W/m<sup>2</sup>°C, (a) sem o uso da função de Kirchhoff e (b) usando a função de Kirchhoff.

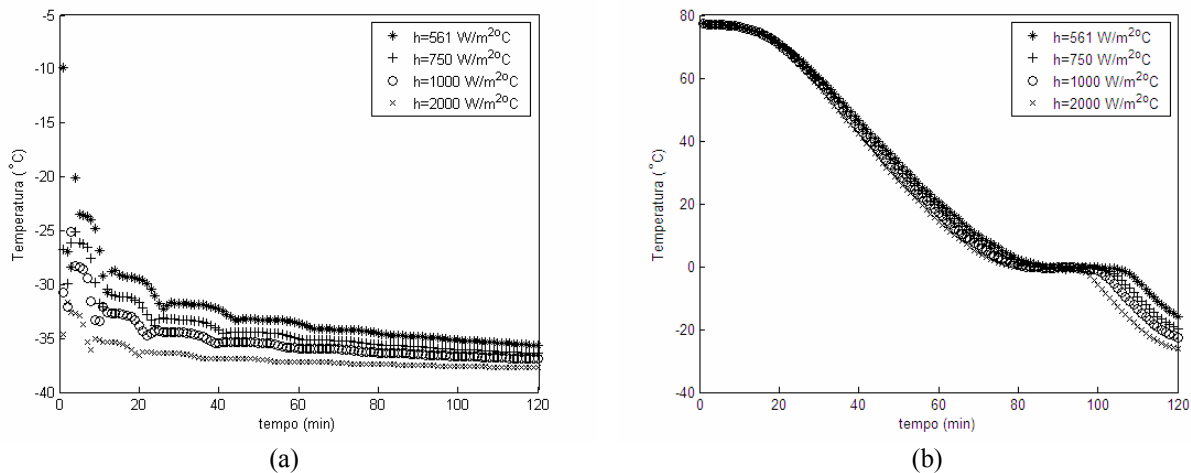


Figura 8 - Perfis de temperatura (a) na superfície e (b) no centro do purê de cenoura para diferentes  $h$ , com  $T_{\infty} = -38.5^{\circ}\text{C}$ .

#### 4. Conclusões

Com a efetivação deste trabalho nota-se que o uso da função  $H$  e  $E$  é atrativo devido ao fato delas serem monotônicas, crescentes e contínuas porque  $\rho$ ,  $c$  e  $K$  são positivas e limitadas. Além do que os resultados numéricos da temperatura sem o uso da função de Kirchhoff oscilam bastante no início do processo de congelamento, principalmente próximo da superfície do alimento, já com o uso da função de Kirchhoff esta oscilação é suavizada e os resultados numéricos aproximam-se dos resultados experimentais, porém no centro do produto o uso da função de Kirchhoff provoca pequenas distorções na solução numérica quando comparada com a solução experimental, tal fato ainda está sendo analisado. O aumento do coeficiente de transferência de calor,  $h$ , faz com que o produto congele mais rapidamente, contudo não foi feita uma análise química e nem sensorial do produto obtido com os diferentes coeficientes de transferência de calor. Neste trabalho em um primeiro momento usou-se uma geometria unidimensional pretende-se em uma próxima etapa utilizar esta modelagem em uma geometria bidimensional e após tridimensional construindo assim um código computacional robusto que possa ser utilizado para obter resultados numéricos para alimentos que passem pelos processos de congelamento, resfriamento e/ou secagem.

#### 5. Agradecimentos

O primeiro autor agradece o suporte financeiro recebido através de uma bolsa PIBIC da Fundação Araucária.

#### 6. Referências

- Alhama, F., Fernández, C. F. G., 2002, "Transient thermal behaviour of phase-change processes in solid foods with variable thermal properties", *Journal of Food Engineering*, Vol. 54, p. 331-336.
- Amarante, A., Lanoisellé, J-L., 2005, "Heat transfer coefficients measurement in industrial freezing equipment by using heat flux sensors", *Journal of Food Engineering*, Vol. 66, pp. 377-386.
- Cleland, A. C., Earle, R. L., "Assessment of Freezing Time Prediction Methods", *Journal of Food Science*, Vol. 49, pp. 1034-1042.
- Fikiin, K. A., 1996, "Generalized numerical modelling of unsteady heat transfer during cooling and freezing using an improved enthalpy method and quasi-one-dimensional formulation", *Int. J. Refrig.*, Vol. 19, nº 2, pp. 132-140.
- Mannapperuma, J. D., Singh, R. P., 1988, "Prediction of freezing and thawing times of foods using a numerical method based on entalpy formulation", *Journal of Food Science*, Vol. 53, nº 2, pp. 626-630.
- Scheerlinck, N., Verboven, P., Fikiin, K. A., de Baerdemacker, J., Nicolai, B. M., 2001, "Finite element computation of unsteady phase change heat transfer during freezing or thawing of food using a combined enthalpy and kirchhoff transform method", *Transactions of the ASAE*, Vol. 44, nº 2, pp. 429-438.
- Smith, G. D., 1985, "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", 3th ed., Oxford.
- Zueco, J., Alhama, F., Fernández, C. F. G., 2004, "Inverse determination of the specific heat of foods", *Journal of Food Engineering*, Vol. 64, pp. 347-353.

## **EXPERIMENTAL AND NUMERICAL STUDY OF THE HEAT TRANSFER IN THE FREEZING PURÉE CARROT**

### **Antônio Augusto Sartori**

Programa de Graduação em Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR  
Rua Imaculada Conceição, 1155, CEP 80215-901, Curitiba, PR, Brasil

### **Álvaro Cesar Camargo do Amarante**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR  
Rua Imaculada Conceição, 1155, CEP 80215-901, Curitiba, PR, Brasil  
alvaro.amarante@pucpr.br

### **Viviana Cocco Mariani**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR  
Rua Imaculada Conceição, 1155, CEP 80215-901, Curitiba, PR, Brasil  
viviana.mariani @pucpr.br

### **Abstract**

In this work a numerical method using the enthalpy and the Kirchhoff function was described and applied to solve the transient heat conduction equation. Non-linear heat conduction problems involving phase changes without internal heat generation, generally are presented in function of the temperature, however in this work a variable change is executed. For example, by performing a change of variables, the temperature dependent density and apparent specific heat capacity can be removed through the introduction of the volumetric specific enthalpy, likewise, the temperature dependent thermal conductivity can be removed through the thermal conductivity integral by using the Kirchhoff transformation. With the objective to illustrate and to validate the application of the computational code had been used experimental data of the freezing purée carrot. The numerical explicit finite difference method was used. The numerical and experimental results of temperature profile and heat flow (in the surface of the food) x time in some points are presented with and without the use of the function Kirchhoff showing the advantages of the use of this function. The variation of the heat convective coefficient in the heat transfer is evaluated. A good agreement between measurements and model predictions was obtained.

**Keywords:** Kirchhoff function, enthalpy, freezing, purée carrot, heat transfer